

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

---

ИЗВЕСТИЯ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР

МЕХАНИКА  
ЖИДКОСТИ И ГАЗА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

---

МОСКВА · 1984

имеем  $z_k = z_2$ . При дальнейшем увеличении  $|\alpha|$  найдется значение  $\alpha = \alpha_3(\beta, z_1, z_2)$ , такое, что кривая  $G$  соединит точки  $A_1$  и  $A_2$ . При этом  $f(z)$  имеет один нуль внутри отрезка  $[z_1; z_2]$ . Далее найдется следующее, большее по модулю значение  $\alpha = \alpha_4(\beta, z_1, z_2)$ , при котором внутри отрезка лежат уже два нуля функции  $f(z)$ . Продолжая этот процесс, находим спектр устойчивых гравитационно-акустических колебаний.

Рассмотрим теперь интервал  $0 < \alpha < \beta$ . Оказывается, что при этих значениях  $\alpha$  функция  $G$  монотонно возрастает и при  $z \rightarrow +\infty$  имеем  $G \rightarrow 1$ . Следовательно, на этом интервале нет значений  $\alpha$ , удовлетворяющих поставленным условиям.

Рассмотрим  $\alpha > \beta$ . Функция  $G$  монотонно убывает при возрастании  $z$  и при  $z \rightarrow +\infty$  стремится к 1. Следовательно, кривая  $G$  при любых  $\alpha > \beta$  проходит ниже точки  $A_2$ . Таким образом, доказано, что существует только одна неустойчивая мода (15).

В заключение автор выражает признательность С. И. Анисимову за постоянное внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Plesset M. S., Hsieh D. Y. General analysis of the stability of superposed fluids.— Phys. Fluids, 1964, v. 7, № 8, p. 1099—1113.

Москва

Поступила в редакцию  
27.VII.1982

УДК 532.516:533.6.011.8

## О ГАЗОКИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ

ЧЕКАЛОВ В. В.

Основным уравнением гидродинамической теории смазки является уравнение Рейнольдса [1]. Это уравнение описывает движение капельной жидкости в зазоре между смазываемыми поверхностями.

Развитие современной техники газовой смазки выдвигает задачу создания теории газовых подшипников с ультратонкими зазорами, равными, либо меньшими средней длины свободного пробега молекул газа  $\lambda$  [2]. При этом число Кнудсена  $K$  может принимать произвольные значения. В частности, в устройствах высокой плотности записи информации ЭВМ зазор между записывающей головкой и носителем информации достигает долей микрометра [3]. Поверхности имеют высокую степень точности обработки. По данным работы [4], микрорельеф обработки реальной записывающей головки менее 0,01 мкм, что на порядок меньше длины свободного пробега молекул. В период запуска и остановки обычных газовых подшипников минимальный зазор также сравним с длиной свободного пробега [2].

Для описания газовой смазки с зазорами, соответствующими малым числам Кнудсена, применяют модифицированное уравнение Рейнольдса, полученное использованием граничных условий скольжения в уравнениях гидродинамики [3—6]. Экспериментальные данные показывают, что существуют условия, при которых это уравнение неприменимо. По данным работы [3], расхождение между экспериментом и теорией составляет от 20 до 40% при изменении числа Кнудсена от 0,1 до 0,173. В области умеренных и больших чисел Кнудсена полностью отсутствуют предпосылки для использования модифицированного уравнения Рейнольдса.

Представляется целесообразным использовать методы кинетической теории газов для построения теории газовых подшипников с ультратонкими зазорами. В работах [5, 7] рассмотрено представление функции, аппроксимирующей функцию распределения в моментном методе динамики разреженного газа, применительно к задачам газовой смазки. Это представление использовано в [5, 8, 9] при рассмотрении некоторых задач газовой смазки.

В настоящей работе получено уравнение газокинетической теории смазки в предположении несжимаемости газа, основывающееся на решении уравнения Больцмана моментным методом со специальной аппроксимирующей функцией. В пределе малого числа Кнудсена, рассчитанного по минимальному зазору, уравнение переходит в известное уравнение Рейнольдса. Рассмотрена задача Рейнольдса о смазочном слое газа между двумя близкими плоскостями. В пределе малого числа Кнудсена получено совпадение с известным решением гидродинамической теории. Проведено сравнение с решением, полученным гидродинамическим методом с граничными условиями скольжения при пренебрежении сжимаемостью газа.

1. Рассмотрим изотермическую задачу об относительном движении двух поверхностей со скоростями  $V_1$  и  $V_2$ , пространство между которыми заполнено газом. Полагая  $V_1, V_2 \ll 4g$ . Здесь  $4g = \sqrt{2kT/\pi m}$  — средняя тепловая скорость молекул газа,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура газа. Зазор между поверхностями много меньше характерного линейного размера каждой поверхности.

Введем декартову систему координат  $xuz$ . Вектор  $V_1$  лежит в плоскости  $uz$ . Начало координат поместим на поверхности, движущейся со скоростью  $V_1$ . Плоскость  $xu$  совпадает с касательной плоскостью к этой поверхности. Поверхность задаем

уравнением  $z=z_1(x, y)$ . Вторую поверхность задаем уравнением  $z=z_2(x, y)=h(x, y)+z_1(x, y)$ . Здесь  $h(x, y)$  — величина зазора между поверхностями. Область рассмотрения ограничим цилиндрической поверхностью  $\varphi(x, y)=0$ .

Потребуем

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2 \ll 1; \quad \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2 \ll 1 \quad (1.1)$$

$$|z_1(x, y)| \ll |h(x, y)| \quad (1.2)$$

Движение разреженного газа в прослойке описываем уравнением Больцмана [10]

$$\nabla(\mathbf{c}nf) = \Delta_c n f \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{c}$  — вектор молекулярной скорости,  $n$  — молекулярная числовая плотность,  $\Delta_c n f$  — бoльцмановский интеграл столкновений,  $n f$  — функция распределения скоростей молекул.

Принимаем диффузный закон отражения [10] молекул газа от ограничивающих поверхностей, а вне рассматриваемой области давление считаем заданным

$$\begin{aligned} n f(\mathbf{c}) &= n_{w1} f_0(\mathbf{c}, T, \mathbf{V}_1), \quad z=z_1(x, y), \quad c_z > 0, \quad \mathbf{V}_1 = \{U_1, 0, W_1\} \\ n f(\mathbf{c}) &= n_{w2} f_0(\mathbf{c}, T, \mathbf{V}_2), \quad z=z_2(x, y), \quad c_z < 0, \quad \mathbf{V}_2 = \{U_2, V, W_2\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$n = n_0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

Здесь  $n f_0(\mathbf{c}, T, \mathbf{V})$  — максвелловская функция распределения,  $n_{w1}$ ,  $n_{w2}$  — числовые плотности, удовлетворяющие условиям непротекания на поверхностях. При этом учтено, что в силу (1.1)

$$\mathbf{c}n_{1,2} = c_x \frac{\partial z_{1,2}}{\partial x} + c_y \frac{\partial z_{1,2}}{\partial y} + c_z \approx c_z$$

где  $n_{1,2}$  — вектор нормали к каждой поверхности соответственно.

Для решения уравнения Больцмана (1.3) с граничными условиями (1.4) применим моментный метод, заключающийся в том, что функцию распределения аппроксимируют функцией зависящей от конечного числа параметров. Параметры, определяющие функцию распределения, находят в результате решения соответствующего числа уравнений переноса. Воспользуемся аппроксимирующей функцией, построенной в [5, 7] для задач о течениях изотермического газа в тонких слоях

$$\begin{aligned} n f(\mathbf{c}) &= n_0 f_{00} \left[ 1 + \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \frac{c_x}{RT} u_{1,2}(\mathbf{r}) + \frac{c_y}{RT} v_{1,2}(\mathbf{r}) + \frac{c_z}{RT} w(\mathbf{r}) \right] \quad (1.5) \\ f_{00} &= (2\pi RT)^{-3/2} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT}\right) \end{aligned}$$

где  $n_0 = \text{const}$ ,  $|\mathbf{v}(\mathbf{r})| \ll 1$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки пространства,  $R$  — универсальная газовая постоянная, индексы 1, 2 соответствуют  $c_z > 0$ ,  $c_z < 0$ .

Для определения шести неизвестных функций  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ,  $u_{1,2}(\mathbf{r})$ ,  $v_{1,2}(\mathbf{r})$ ,  $w(\mathbf{r})$  выбираем шесть уравнений переноса, полученных умножением уравнения Больцмана на 1,  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$ ,  $c_x c_z$ ,  $c_y c_z$  и интегрированием по всему пространству скоростей молекул, в предположении максвелловских молекул.

Аппроксимирующая функция (1.5) обладает таким свойством, что уравнение неразрывности тождественно совпадает с уравнением сохранения энергии [5, 7].

По аппроксимирующей функции (1.5) вычисляем моменты, входящие в систему уравнений переноса. Например

$$n\langle 1 \rangle = n_0(1+v); \quad n\langle c_x \rangle = n_0 u_+ / 2; \quad n\langle c_x^2 \rangle = 2\pi g^2 n_0(1+v)$$

$$u_{\pm} = u_1 \pm u_2; \quad v_{\pm} = v_1 \pm v_2$$

Введем безразмерные переменные  $u_{\pm}' = u_{\pm}/g$ ;  $v_{\pm}' = v_{\pm}/g$ ;  $w' = w/g$ ;  $\mathbf{v}' = 2\pi\mathbf{v}$ .

В результате подстановки моментов аппроксимирующей функции в систему уравнений переноса получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+}{\partial x} + \frac{\partial v_+}{\partial y} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u_-}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v_-}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_-}{\partial x} + \frac{\partial v_-}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, & 2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_+}{\partial z} &= -\frac{u_-}{\lambda}, & 2 \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_+}{\partial z} &= -\frac{v_-}{\lambda} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из (1.4) с учетом (1.5) получаем граничные условия для этой системы

$$\begin{aligned} z=z_1(x, y), \quad u_1=U_1/g=U_1', \quad v_1=0, \quad w=W_1/g=W_1' \\ z=z_2(x, y), \quad u_2=U_2/g=U_2', \quad v_2=V/g=V', \quad w=W_2/g=W_2' \\ \varphi(x, y)=0, \quad v=0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Выражая из последних пяти уравнений системы производные концентрации по координатам, с учетом геометрии задачи можно показать, что

$$\left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \ll \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

Кроме того, проводя оценки из первого уравнения системы (1.6) величин  $u_+$ ,  $v_+$ ,  $w$ , легко показать, что в последних двух уравнениях системы (1.6) можно пренебречь  $\partial w / \partial x$  по сравнению с  $\partial u_+ / \partial z$ , а также  $\partial w / \partial y$  по сравнению с  $\partial v_+ / \partial z$ .

С учетом этого замечания, а также с учетом (1.8) интегрируем систему (1.6)

$$u_- = -\frac{\partial v}{\partial x} z + C_1(x, y), \quad v_- = -\frac{\partial v}{\partial y} z + C_2(x, y)$$

$$u_+ = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{z^2}{2\lambda} - \frac{z}{\lambda} C_1(x, y) + C_3(x, y)$$

$$v_+ = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{z^2}{2\lambda} - \frac{z}{\lambda} C_2(x, y) + C_4(x, y)$$

$$\frac{z^2}{2\lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{z}{\lambda} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial C_3}{\partial x} + \frac{z^2}{2\lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{z}{\lambda} \frac{\partial C_2}{\partial y} + \frac{\partial C_4}{\partial y} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Проинтегрируем последнее уравнение по  $z$  от  $z_1(x, y)$  до  $z_2(x, y)$ . С учетом граничных условий (1.7) для  $v$  получим

$$\begin{aligned} \frac{z_2^3 - z_1^3}{6\lambda} \Delta v - \frac{z_2^2 - z_1^2}{2\lambda} \left( \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial C_2}{\partial y} \right) + h \left( \frac{\partial C_3}{\partial x} + \frac{\partial C_4}{\partial y} \right) + 2 \frac{W_2 - W_1}{g} = 0 \\ \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из граничных условий (1.7) определяем константы интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ . Подставляя их значения в (1.9) и учитывая (1.2), приходим к уравнению для определения концентрации

$$\begin{aligned} \frac{h^2 \eta}{3} \Delta v - \frac{h}{2} (\eta + 1) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = \\ = \frac{V'}{1 + \eta^{-1}} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{U_2' - U_1'}{1 + \eta^{-1}} \frac{\partial h}{\partial x} + 2(W_1' - W_2'), \quad \eta = \frac{h}{2\lambda} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Это уравнение является уравнением газокINETической теории смазки без учета сжимаемости газа.

Оценим скорости поверхностей, при которых газовую смазку можно считать несжимаемой. Полагаем  $h \sim h_0$ ,  $x \sim a$ ,  $y \sim b$ . Для определенности положим  $a < b$ . Тогда оператор в левой части (1.10) имеет порядок

$$-\frac{vh_0^2}{2a^2} \left( \frac{\eta_0}{3} + 1 \right), \quad \eta_0 = \frac{h_0}{2\lambda}$$

Учитывая лишь составляющую  $W_2'$  скорости поверхности  $z=z_2(x, y)$ , получим, что условие  $|v| \ll 1$  будет выполнено при

$$|W_2'| \ll \frac{h_0^2}{4a^2} \left( 1 + \frac{\eta_0}{3} \right)$$

Аналогично для составляющей  $U_2'$  этой поверхности условие несжимаемости газа будет выполнено при

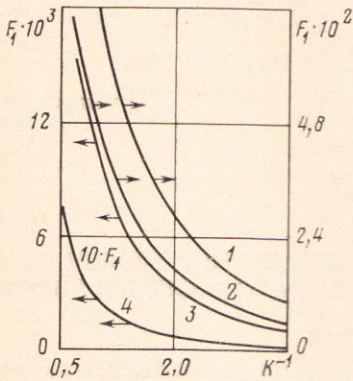
$$U_2' \ll \frac{h_0}{2a} \left( \frac{4}{3} + \eta_0^{-1} + \frac{\eta_0}{3} \right)$$

газа дает выражение

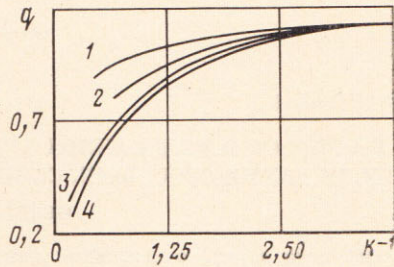
$$F_2 = \frac{F}{F_0} = \int_1^{H_1} \frac{(H_1-1) dH}{H(H+2K)} - \int_1^{H_1} \frac{dH}{H(H+2K)} \int_1^{H_1} \frac{(H-1) dH}{H^2(H+2K)} / \int_1^{H_1} \frac{dH}{H^2(H+2K)} \quad (2.5)$$

В рассматриваемой задаче — три независимых линейных параметра  $\lambda$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ . Решения (2.4) и (2.5) зависят от их двух безразмерных комбинаций  $s=2\lambda/(h_1-h_2)$ ,  $K=s(H_1-1)/2$ .

По выражениям (2.4) и (2.5) проведен счет на ЭВМ. Интегралы вычислялись по формуле Симпсона<sup>1</sup>. Результаты счета по выражению (2.4) представлены на фиг. 1. Кривым 1–4 соответствуют значения  $s=0,8$ ; 1,0; 2,0; 8,0. Зависимость отношения  $q=F_1/F_2$  газокINETического решения (2.4) к гидродинамическому со скольжением (2.5) от числа Кнудсена  $K$  и параметра  $s$ , характеризующего наклон под-



Фиг. 1



Фиг. 2

шипника, представлена на фиг. 2 (1 —  $s=0,8$ ; 2 —  $s=2,0$ ; 3 —  $s=8,0$ ; 4 —  $s=32,0$ ). С увеличением числа Кнудсена решения значительно отличаются друг от друга, причем это различие возрастает с уменьшением угла наклона подшипника (увеличение  $s$ ) и проявляется при меньших  $K$ .

Имеются эксперименты [3] с подшипником конечной ширины, расчет которого следует проводить, решая более сложную двумерную задачу для уравнения, аналогичного уравнению (1.11), но полученного с учетом сжимаемости газа. В то же время следует отметить, что в экспериментах [3] имеет место качественно аналогичное поведение экспериментальной кривой по отношению к гидродинамическому со скольжением решению. Эти эксперименты проводились при малых углах наклона подшипника, определяемых значительными скоростями смазки. Аналогичные эксперименты при существенно больших углах наклона подшипника [4] дают хорошее совпадение с решением на основе гидродинамической постановки с граничными условиями скольжения.

Характер поведения газокINETического решения по отношению к решению гидродинамическому со скольжением в модельной задаче Рейнольдса, имеющей аналогию с поведением экспериментальных кривых по отношению к расчетным, позволяет надеяться на то, что дальнейшее развитие газокINETической теории смазки приведет к успешному решению задач расчета реальных газовых подшипников с ультратонкими зазорами.

Автор благодарит Л. П. Смирнова за постоянное внимание к работе, а также участников семинара Г. И. Петрова за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рейнольдс О. Гидродинамическая теория смазки и ее применение к опытам Тоуэра. — В кн.: Гидродинамическая теория смазки. М.: Гостехиздат, 1934, с. 247–360.
2. Дроздович В. Н. Газодинамические подшипники. Л.: Машиностроение, 1976. 207 с.
3. Sereni A., Castelli V. Experimental investigation of slider gas bearings with ultra-thin films. — Trans. ASME, J. Lubr. Technol., 1979, v. 101, № 4, p. 510–515.
4. Смирнов Л. П., Чекалов В. В. Гидродинамические и газокINETические методы определения сил, действующих на тела, движущиеся вблизи границ. — В кн.: 5-й Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике. Аннот. докл. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 325.

<sup>1</sup> Расчет проведен В. А. Чекаловым.

5. Burgdorfer A. The influence of the molecular mean free path of the performance of hydrodynamic gas lubricated bearings.— Trans. ASME. ser. D, 1959, v. 81, № 1, p. 94—100.
6. Mitsuya Y., Kaneko R. Molecular mean free path effects in gas lubricated slider bearings.— Bull. JSME, 1981, v. 24, № 187, p. 236—242.
7. Чекалов В. В. Способ построения аппроксимирующей функции в граничных задачах динамики разреженного газа. М., 1980. 21 с. (Деп. в ВИНТИ 7 мая 1980 г., № 1803—80. Деп.)
8. Смирнов Л. П., Чекалов В. В. О движении сферы к плоскости в газе с учетом разреженности прослойки. М., 1979, 16 с. (Деп. в ВИНТИ 16 окт. 1979 г. № 3572—79 Деп.)
9. Чекалов В. В. Об учете разреженности газа в цилиндрическом подшипнике. М., 1979. 12 с. (Деп. в ВИНТИ 16 мая 1979 г. № 2612—79 Деп.)
10. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
11. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
12. Бэгчелор Д. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973, 758 с.

Переславль

Поступила в редакцию  
27.IX.1982

УДК 532.517.6.011

## К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТОНКОМ СЛОЕ МЕЖДУ ДВУМЯ СООСНЫМИ, СОВМЕСТНО ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

ЧЕСНОКОВ В. М.

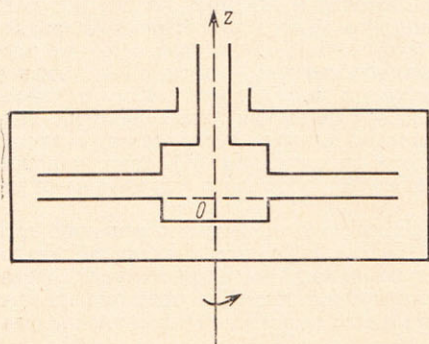
Рассмотрена задача о движении несжимаемой вязкой жидкости в щелевом пространстве между двумя соосными дисками, совместно вращающимися с постоянной угловой скоростью, в предположении, что давление изменяется с течением времени по гармоническому закону. При решении задачи были использованы уравнения нестационарного движения несжимаемой вязкой жидкости в тонком слое.

Получено, что поле скоростей в этом случае представляет наложение на стационарное поле затухающих колебаний с циклической частотой, равной удвоенной угловой скорости вращения дисков, и вынужденных колебаний с циклической частотой, равной циклической частоте колебаний поля давления.

Выяснено, что амплитуда вынужденных колебаний поля скоростей существенно зависит от отношения циклической частоты колебаний поля давления к угловой скорости вращения дисков.

Установлено, что имеется некоторое значение данного отношения, при котором амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения (явление резонанса).

Показано, что даже при крайне незначительных амплитудах колебания давления амплитуда колебания относительной скорости при резонансе может достигать величины, сравнимой со средней скоростью основного потока.



Фиг. 1

Стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости между соосными вращающимися дисками или конусами изучалось многими авторами, например [1—4]. Изучение таких течений представляет интерес в связи с разнообразными техническими приложениями, например применительно к проектированию многодисковых насосов, турбин, компрессоров, тарельчатых сепараторов.

Наряду с этим представляет также интерес изучение нестационарных течений периодического характера, возникающих в вышеупомянутых устройствах в силу неравномерности подачи жидкости, колебаний давления и т. п. Целью предлагаемого исследования является выяснение влияния малых периодических изменений давления на поле скоростей.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим движение жидкости между вращающимися дисками, используя схему, приведенную на фиг. 1. Эта схема приближенно моделирует одно межтарелочное пространство сепаратора для случаев центральной и периферийной подачи жидкости в межтарелочное пространство. Принимая во внимание, что в тарельчатых сепараторах  $h/R \ll 1$  (фиг. 1), запишем безразмерные уравнения несжимаемости и относительного, осесимметричного, изотермического